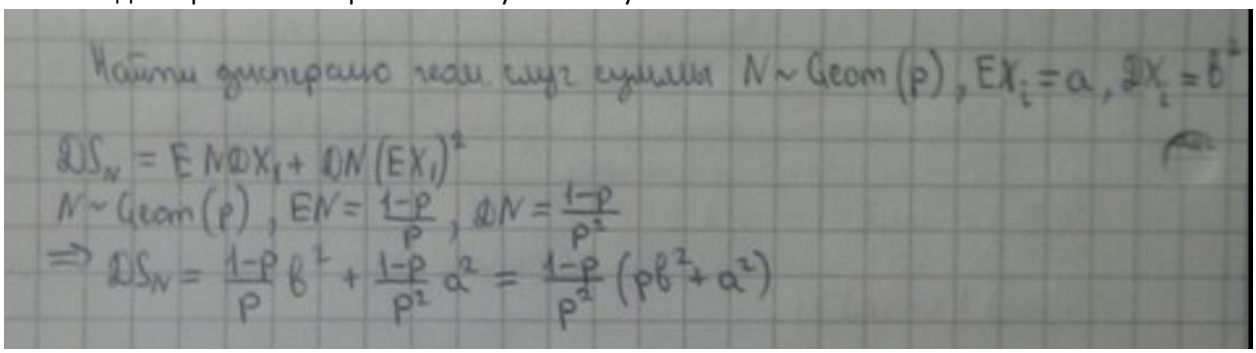
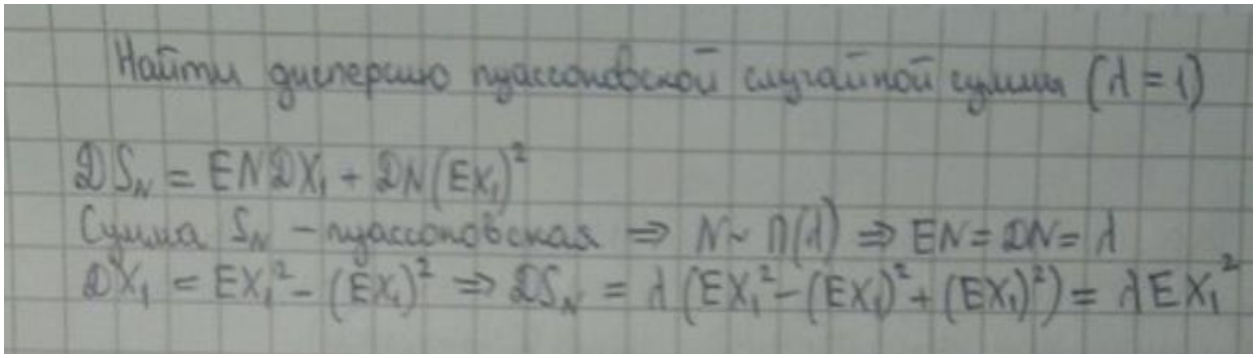
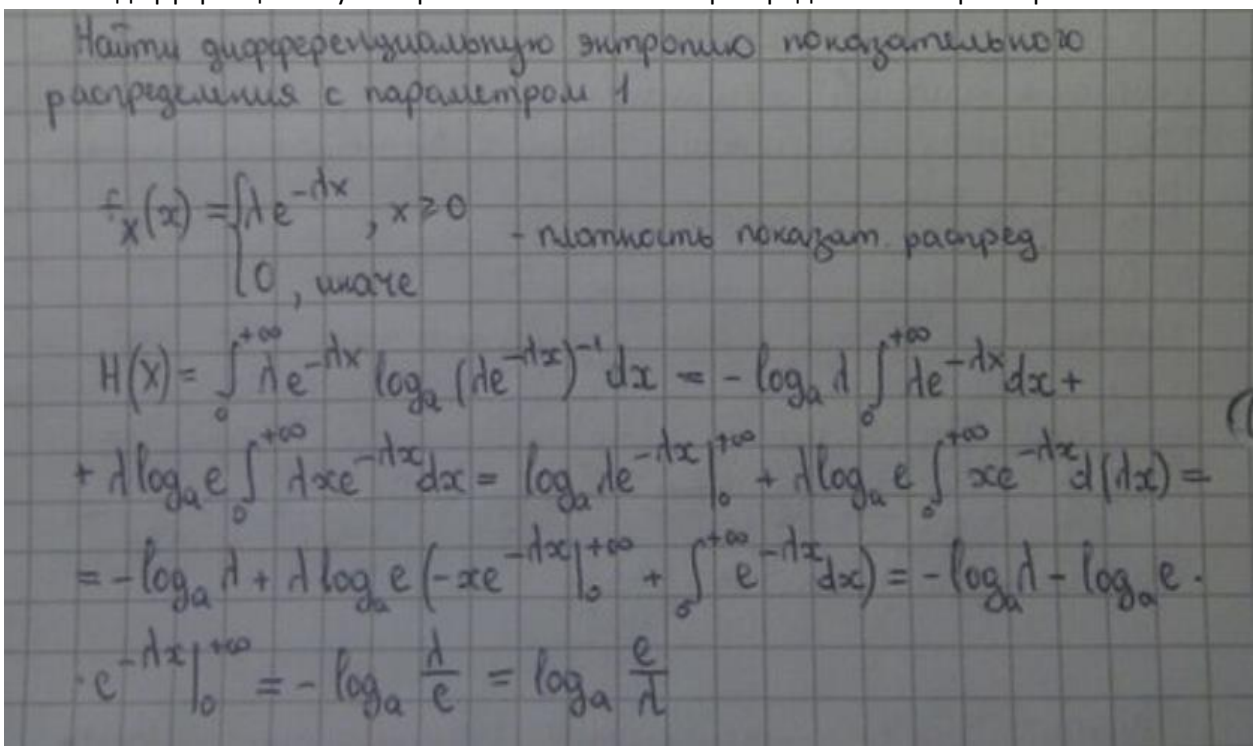
1. Найти дисперсию геометрической случайной суммы



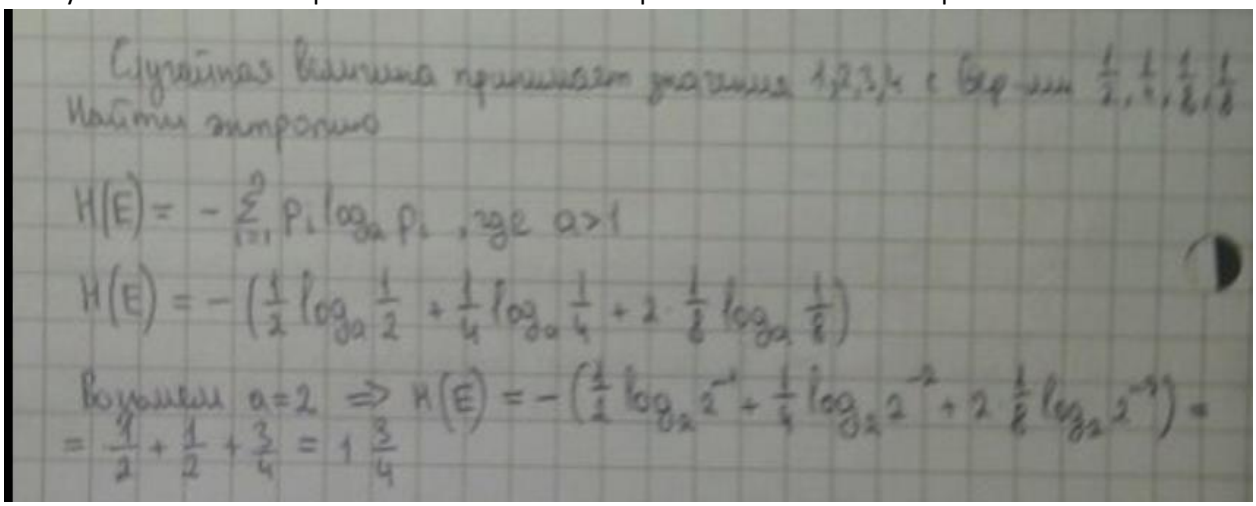
2. Найти дисперсию Пуассоновской случайной суммы



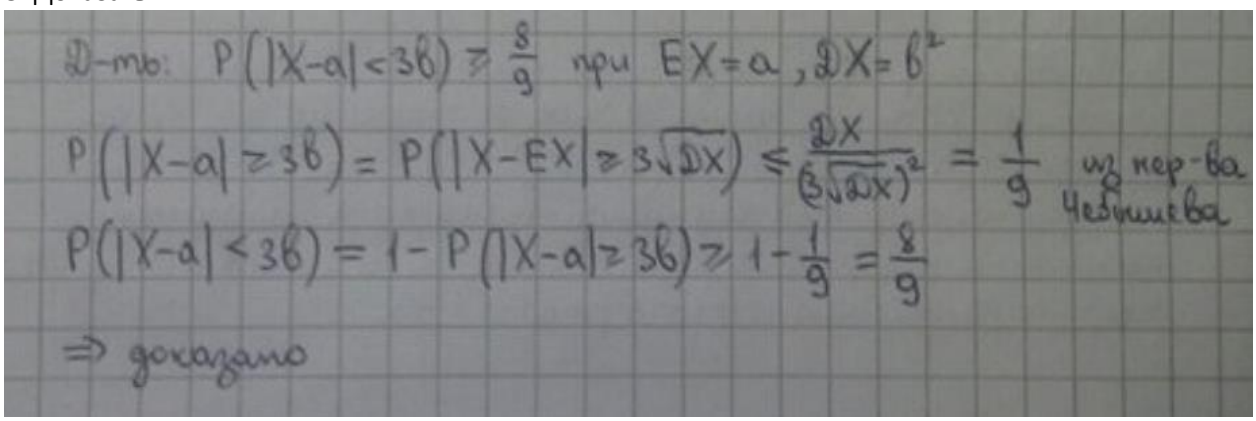
3. Найти дифференциальную энтропию показательного распределения с параметром 1



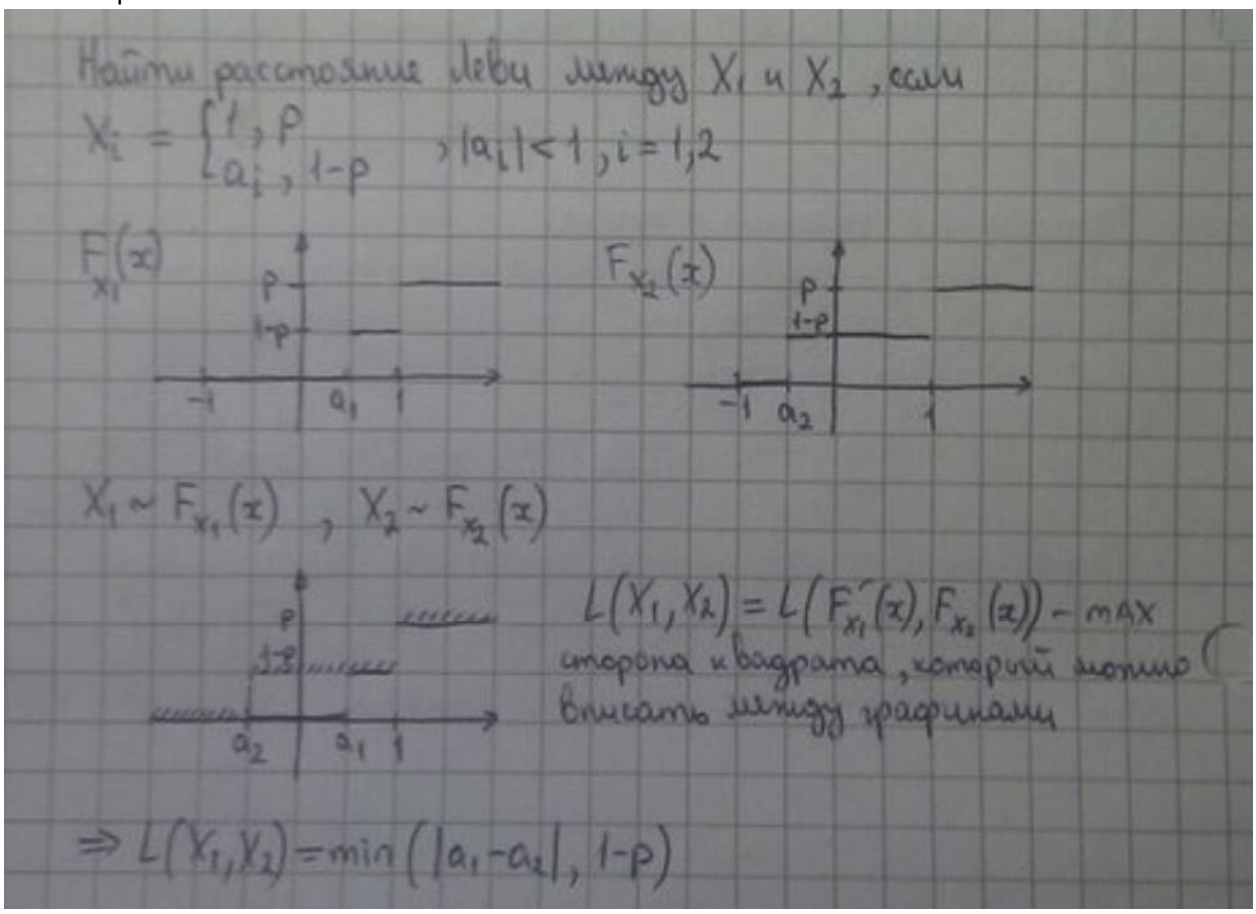
4. Случайная величина принимает значения … с вероятностью … Найти энтропию



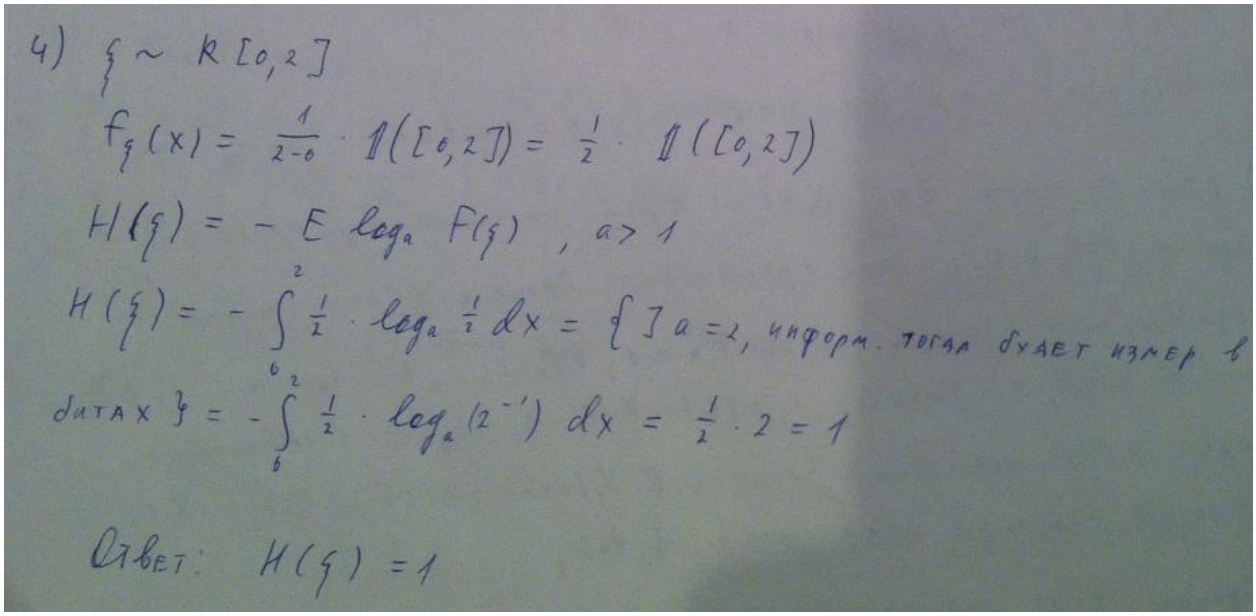
5. Доказать:



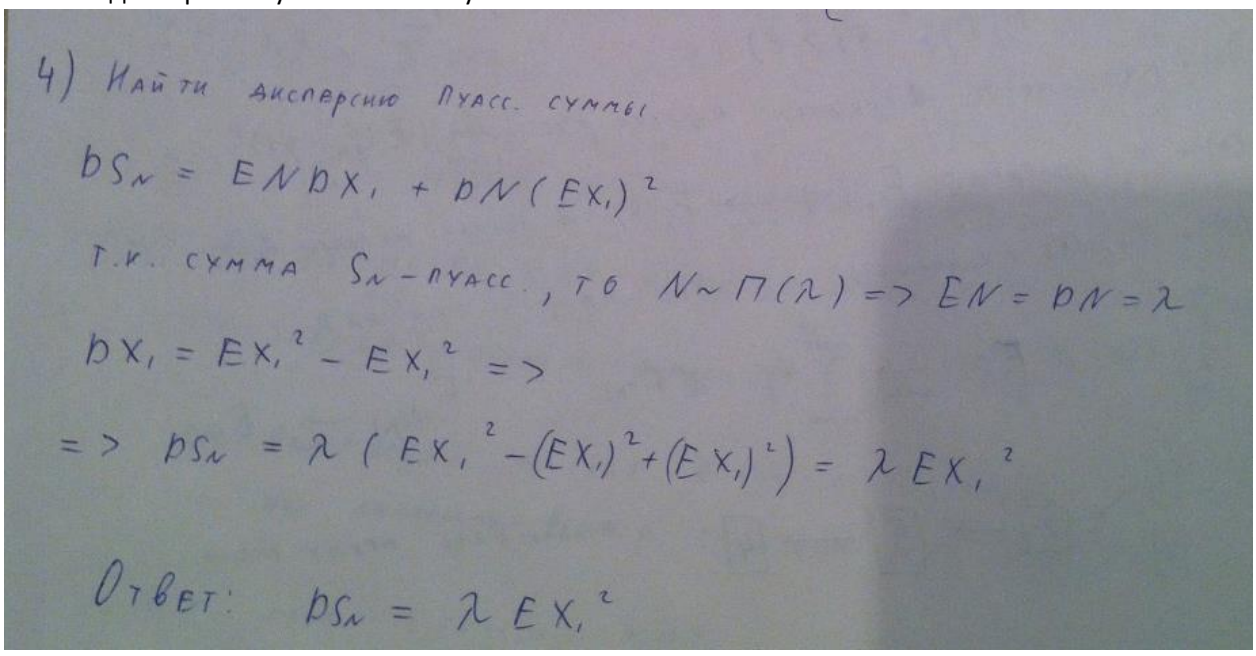
6. Найти расстояние Леви



7. Задача с энтропией



8.Найти дисперсию Пуассоновской суммы



4) Найти дисперсию Пуасс. суммы

$DS_N = EN\,DX_1 + DN(EX_1)^2$

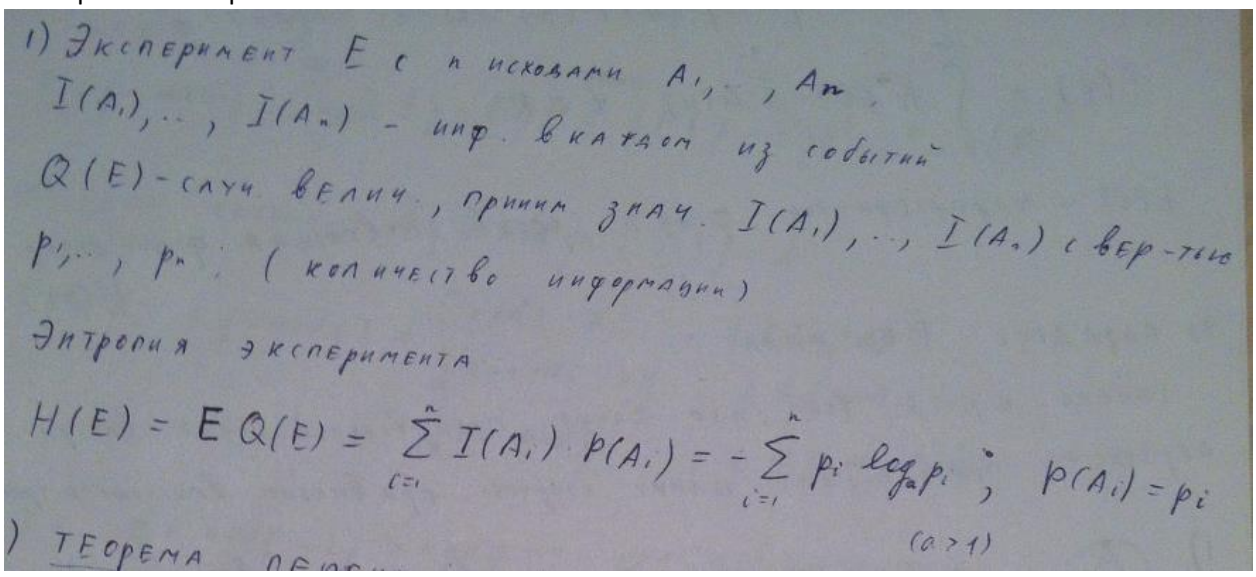
т.к. сумма S_N – пуасс., то $N \sim \Pi(\lambda) \Rightarrow EN = DN = \lambda$

$DX_1 = EX_1^2 - EX_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow DS_N = \lambda\left(EX_1^2 - (EX_1)^2 + (EX_1)^2\right) = \lambda EX_1^2$

Ответ: $DS_N = \lambda EX_1^2$

9. Энтропия эксперимента



1) Эксперимент E с n исходами $A_1, \dots, A_n$;

$I(A_1), \dots, I(A_n)$ – инф. в каждом из событий

$Q(E)$ – случ. велич., принимающая знач. $I(A_1), \dots, I(A_n)$ с вер-тью $p_1, \dots, p_n$ (количество информации)

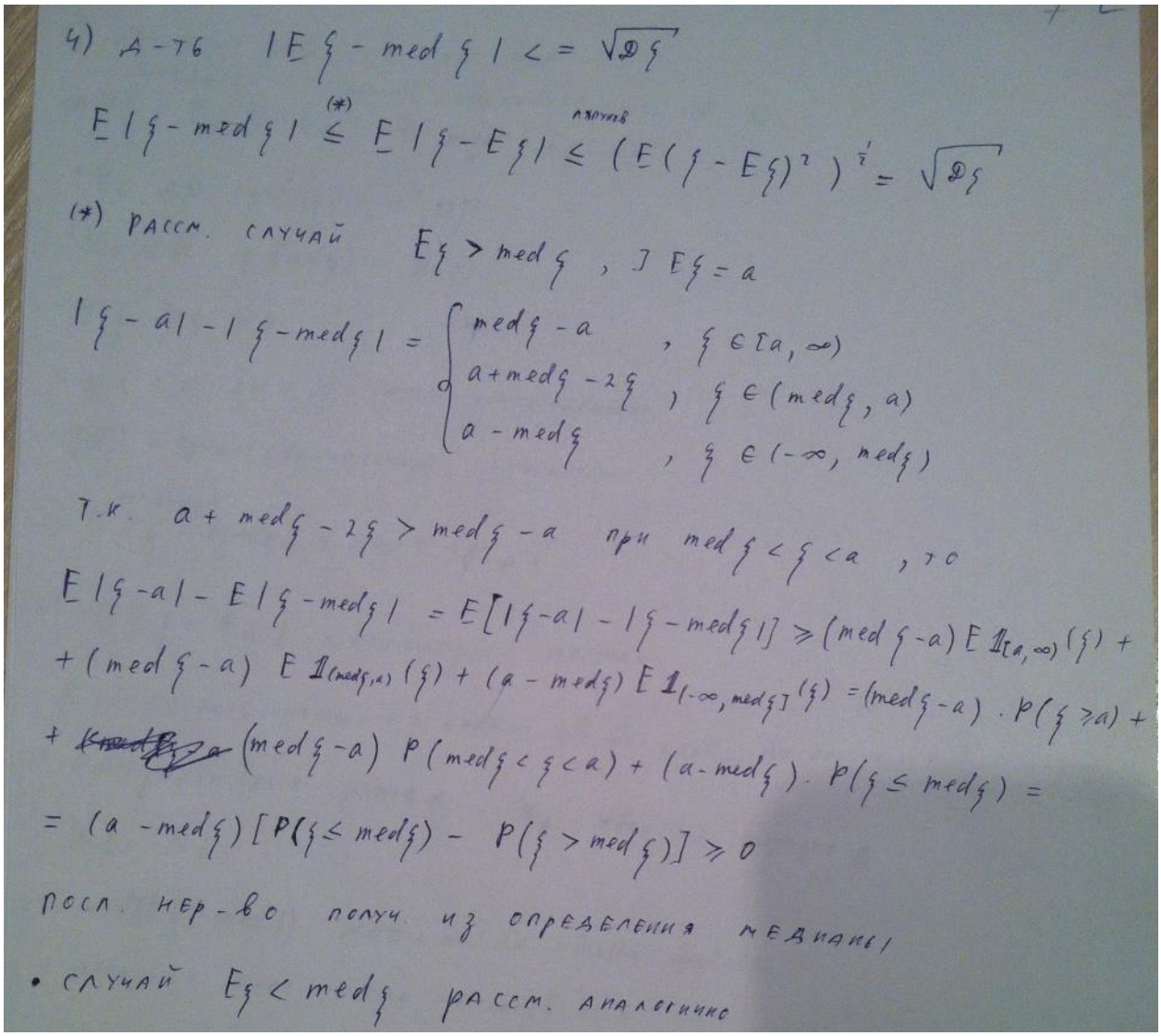
Энтропия эксперимента

$$H(E) = EQ(E) = \sum_{i=1}^{n} I(A_i)\,P(A_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_a p_i; \quad P(A_i) = p_i$$

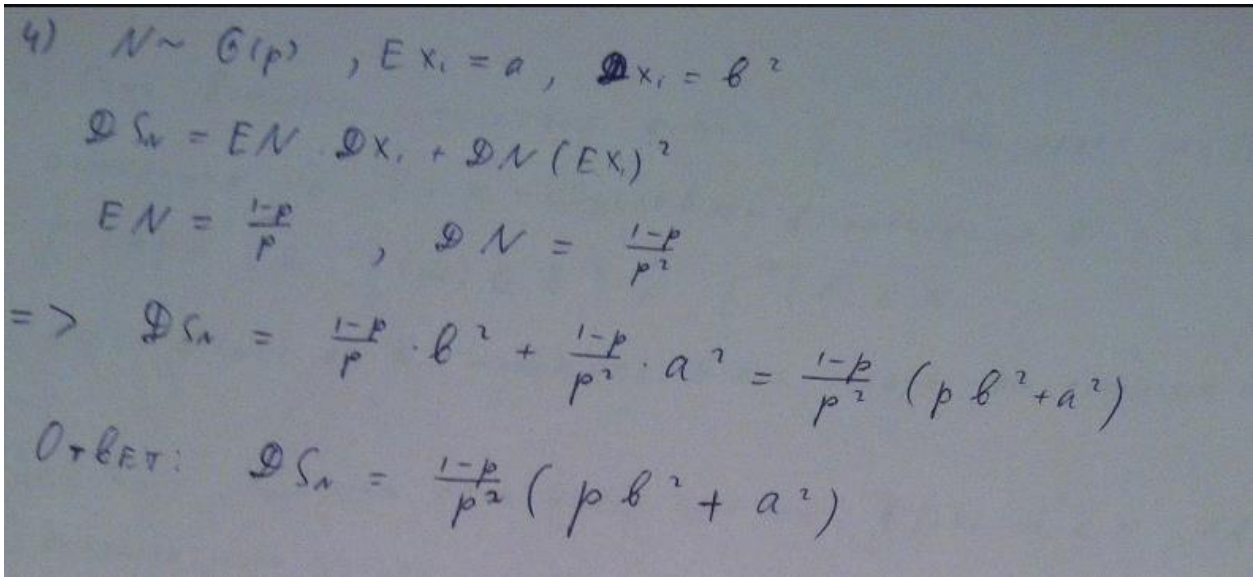
$(a > 1)$

) Теорема

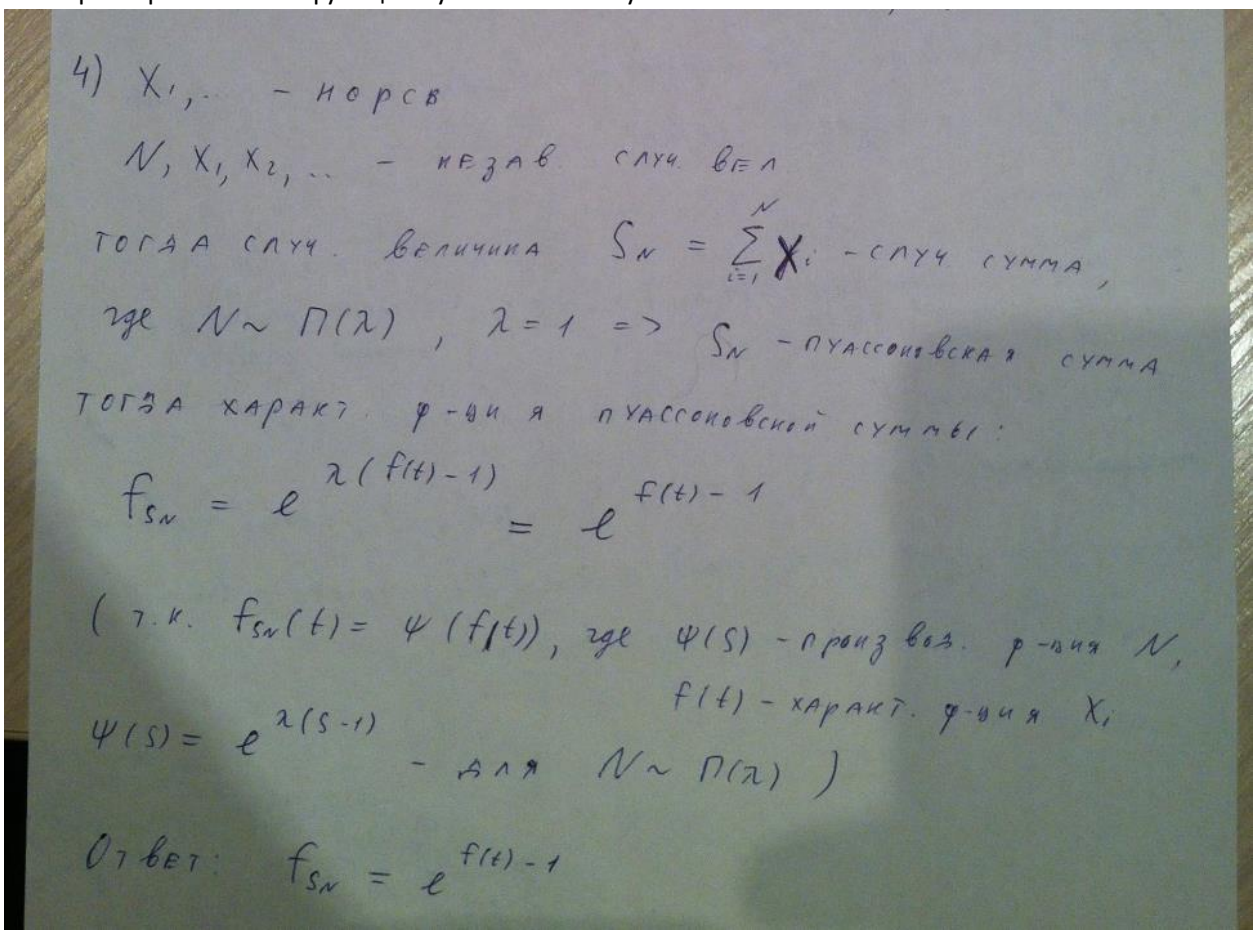
10.Доказать



11. Задача с геометрически случайной суммой



12. Характеристическая функция пуассоновской суммы



4) $X_1, \ldots$ – норсв

$N, X_1, X_2, \ldots$ – незав случ вел

тогда случ величина $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ – случ сумма,

где $N \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda = 1 \Rightarrow$ S_N – пуассоновская сумма

тогда характ ф-ия пуассоновской суммы:

$$f_{S_N} = e^{\lambda(f(t)-1)} = e^{f(t)-1}$$

(т.к. $f_{S_N}(t) = \psi(f(t))$, где $\psi(s)$ – произв воз ф-ия N,

$f(t)$ – характ ф-ия X_i

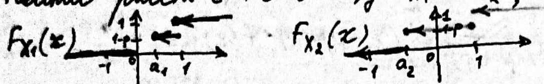
$\psi(s) = e^{\lambda(s-1)}$ – для $N \sim \Pi(\lambda)$)

Ответ: $f_{S_N} = e^{f(t)-1}$

1] Найти диф. энтропию сл. в., имеющей равн-е распр-е на [0,2].

$H(x) = -\int_0^2 \frac{1}{2}\cdot\log\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\log 2\cdot x\Big|_0^2 = \log 2$

2] Найти расст-е Леви м/у X_1 и X_2, если $X_i = \begin{cases} 1, & p \\ a_i, & 1-p \end{cases}$, $|a_i|<1$ $i=1,2$

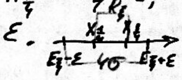


$L(X_1,X_2) = L(F_{X_1}(x), F_{X_2}(x))$ – max сторона кв-та, к/т можно вписать м/у графиками.

$\Rightarrow L(X_1,X_2) = \min(|a_1-a_2|, 1-p)$. $P(X_i<x) = F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1, & x\geq 1 \\ 1-p, & a_i\leq x<1 \\ 0, & x<a_i \end{cases}$

3] R_ξ – интерквартильный размах сл. в. ξ с кон-м 2м моментом $D\xi = \sigma^2$. Д-ть, $R_\xi \leq 4\sigma$.

$R_\xi = X_{\frac{3}{4}} - X_{\frac{1}{4}}$. Р-м нер-во Чебышева: $P(|\xi - E\xi|\leq\varepsilon) \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$. Выберем ε так, чтобы $\sigma^2/\varepsilon^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \varepsilon = 2\sigma \Rightarrow P(E\xi-\varepsilon \leq \xi \leq E\xi+\varepsilon) \geq \frac{3}{4}$. Пок-м, что $X_{\frac{1}{4}}$ и $X_{\frac{3}{4}}$ лежат внутри $[E\xi-\varepsilon, E\xi+\varepsilon]$. а) $P(\xi < E\xi-\varepsilon) < 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. если $X_{\frac{1}{4}} < E\xi-\varepsilon$, то $P(\xi\leq X_{\frac{1}{4}}) < \frac{1}{4}$, но по опр. $X_{\frac{1}{4}}$: $P(\xi\leq X_{\frac{1}{4}}) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow !? \Rightarrow X_{\frac{1}{4}} \geq E\xi-\varepsilon$. б) $P(\xi > E\xi+\varepsilon) < \frac{1}{4}$. если $X_{\frac{3}{4}} > E\xi+\varepsilon$, то $P(\xi\geq X_{\frac{3}{4}}) < \frac{1}{4}$, но по опр. квантиля $X_{\frac{3}{4}}$: $P(\xi\geq X_{\frac{3}{4}}) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow !? \Rightarrow X_{\frac{3}{4}} \leq E\xi+\varepsilon$.



$\Rightarrow R_\xi = X_{\frac{3}{4}} - X_{\frac{1}{4}} \leq E\xi+\varepsilon-(E\xi-\varepsilon) = 2\varepsilon = 4\sigma$

4] $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – НОР сл. в. имеющие распр-е Коши. Д-ть, что $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \xi_i \stackrel{d}{=} \xi_1$.

$f_{\xi_1}(t) = e^{-|t|}$. $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$. $f_{\frac{S_n}{n}}(t) = Ee^{it\frac{S_n}{n}} = Ee^{\frac{it}{n}(\xi_1+\ldots+\xi_n)} = (f_{\xi_1}(\frac{t}{n}))^n = (e^{-\frac{|t|}{n}})^n = e^{-|t|} = f_{\xi_1}(t) = e^{-|t|} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ распр-я $\frac{S_n}{n}$ и ξ_1 также равны.

5] Для $\forall$ ли абсолютно непр-й сл. в. сущ-ет диф. энтропия? Отв: нет.

Контрпример: $p(x) = \begin{cases} 1/(x\cdot\ln^2 x), & x\in[e,+\infty) \\ 0, & x\notin[e,+\infty) \end{cases}$. $H(X) = -E\log p(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\cdot\log p(x)\,dx \stackrel{\downarrow}{=}$ (осн-е лог-ма берем равным e) $-\int_e^\infty \frac{1}{x\cdot\ln^2 x}\cdot\ln\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}dx =$

$= \int_e^\infty \frac{1}{x\cdot\ln^2 x}\cdot(\ln x + \ln\ln^2 x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} \ln x = y, \\ x = e^y \end{matrix}, dx = e^y dy \right\} = \int_1^\infty \frac{1}{e^y\cdot y^2}(y + \ln y^2)\,e^y dy = \int_1^\infty \left(\frac{1}{y} + \frac{2\ln y}{y^2}\right)dy = \ln y\Big|_1^\infty +$

$+ 2\int_1^\infty \frac{\ln y}{y^2}dy = \left\{ \begin{matrix} \ln y = z \\ y = e^z, dy = e^z dz \end{matrix} \right\} = \infty + 2\int_0^\infty \frac{z}{e^{2z}}e^z dz = \infty + 2\int_0^\infty z\cdot e^{-z}dz = \infty - 2(ze^{-z}\Big|_0^\infty + 2e^{-z})\Big|_0^\infty = \infty + 2 = \infty$

$\Rightarrow$ диф. энтр. нет.

6] Пусть ξ_λ – сл. в., имеющая распр-е Пуассона с пар-м $\lambda>0$. Д-ть, $P(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \Phi(x)$

Т.к. хар-ая ф-я станд-го норм-го распр-я равна $e^{-\frac{t^2}{2}}$, то по Т. Леви о непр-м соотв-ии м/у хар-й ф-й и ф-ей распр-я достаточно пок-ть, что $\forall$ фикс $t\in\mathbb{R}$

$f_\lambda^*(t) = Ee^{it\xi_\lambda^*} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$, где $\xi_\lambda^* = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$. $f_\lambda(t) = Ee^{it\xi_\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^\infty e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$. $\Rightarrow$

$f_\lambda^*(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}}f_\lambda(t\lambda^{-\frac{1}{2}}) = e^{(-it\sqrt{\lambda} + \lambda(e^{it\lambda^{-\frac{1}{2}}}-1))}$. Если разл-ть в ряд Маклорена при $\lambda\to\infty$ получим:

$f_\lambda^*(t) = \exp\{-it\sqrt{\lambda} + \lambda(+it\lambda^{-\frac{1}{2}} + (it)^2(2\lambda)^{-1} + o(t^2\lambda^{-1}))\} \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$.

7] X – имеет распр-е Стьюдента с десятью степенями свободы. Что больше, к-т эксцесса X или 3?

M_4 – 4-ый центральный момент. $M_4 = E[(X-EX)^4]$. $\varkappa = \frac{M_4}{(DX)^2}$ – к-т эксцесса. $\varkappa = \frac{E[(X-EX)^4]}{(DX)^2} = \frac{E[(X-EX)^4]}{E[(X-EX)^2]}$. $f_X(y) = \boxed{\frac{\Gamma(\frac{10+1}{2})}{\sqrt{\pi\cdot 10}\,\Gamma(\frac{10}{2})}}\left(1+\frac{y^2}{10}\right)^{-\frac{10+1}{2}}$, $A = \frac{\Gamma(\frac{10+1}{2})}{\sqrt{\pi\cdot 10}\,\Gamma(\frac{10}{2})}$. $EX = A\int_{-\infty}^{\infty} x\left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-\frac{11}{2}}dx \stackrel{\downarrow}{=} 0$ (ф-я подинт-я нечет.). $EX^2 = A\int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-(5+\frac{1}{2})}dx =$

$= 10A\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\cdot\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\right)^{-(5+\frac{1}{2})}dx = \left\{\frac{x}{\sqrt{10}} = t; dx = \sqrt{10}dt\right\} = 10\cdot\sqrt{10}\cdot A\cdot 2\cdot\int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-(5+\frac{1}{2})}dt = \left\{ \begin{matrix} t^2 = z \\ 2tdt = dz \end{matrix}, dt = \frac{dz}{2\sqrt{z}} \right\} =$

$= 10\sqrt{10}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}A\cdot\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}}\cdot(1+z)^{-(5+\frac{1}{2})}dz = 10\cdot\sqrt{10}A\cdot B(\frac{3}{2}, 4) = 10\sqrt{10}A\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{11}{2})} = 10\sqrt{10}\cdot\frac{\Gamma(\frac{11}{2})}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{\pi}\,\Gamma(5)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{11}{2})} =$

$= \frac{10\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\pi}} = \frac{5}{4}$. $EX^4 = A\int_{-\infty}^{\infty}x^4\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\right)^{2-(5+\frac{1}{2})}dx = \left\{\frac{x}{\sqrt{10}} = t, dx = \sqrt{10}dt\right\} = 2\cdot A\cdot 100\cdot\sqrt{10}\cdot\int_0^{+\infty}t^4(1+t^2)^{-(5+\frac{1}{2})}dt =$

$= \left\{ z = t^2, dz = 2tdt, dt = \frac{dz}{2\sqrt{z}} \right\} = A\cdot 100\cdot\sqrt{10}\cdot\int_0^{+\infty} z^2\cdot(1+z)^{-(5+\frac{1}{2})}\frac{dz}{\sqrt{z}} = 100\sqrt{10}\int_0^\infty z^{\frac{3}{2}}\cdot(1+z)^{-\frac{11}{2}}dz = 100\sqrt{10}\cdot A\cdot B(\frac{5}{2}, 3) =$

$= 100\sqrt{10}\cdot\frac{\Gamma(\frac{11}{2})\cdot\Gamma(\frac{5}{2})\cdot\Gamma(3)}{\sqrt{10}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(5)\cdot\Gamma(\frac{11}{2})} = \frac{25}{4}$. $\varkappa = \frac{E(X-EX)^4}{[E(X-EX)^2]^2} = \frac{EX^4}{(EX^2)^2} = \frac{25}{4}\cdot\frac{4^2}{25} = 4 \Rightarrow \varkappa > 3$.

8[ ] ξ_a – сл. в., имеющая геом. распр-е: $E\xi_a = a$. Д-ть, $\lim_{a\to\infty}P(a^{-1}\xi_a < X) = 1-e^{-x}$, $x>0$.

ξ_a: $P(\xi=k) = p(1-p)^k$. Д-ть, что $P(\frac{\xi}{E\xi}<x) \xrightarrow[a\to\infty]{} 1-e^{-x}$, $x>0$. $\varphi_\xi(t) = \frac{p}{1-qe^{it}}$. $\lim_{p\to 0}\varphi_{\frac{\xi}{E\xi}}(t) = \{$т.к. если $Y = aX$, то $\varphi_Y(t) = \varphi_X(at)$ и геом-го распр-я $E\xi = \frac{q}{p}\} = \lim_{p\to 0}\frac{p}{1-q\exp\{itp/q\}} = \{$разл-м $\exp$ в ряд$\} = \lim_{p\to 0} p/[1-q(1+\frac{itp}{q}+\bar{o}(\frac{itp}{q}))] = \lim_{p\to 0} p/[1-q-itp] = \lim_{p\to 0} p/[1-1+p+itp] =$

$= \lim_{p\to 0}\frac{1}{1-it} = \frac{1}{1-it}$. Y: $P(Y<x) = \begin{cases} 1-e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$. $\varphi_Y(t) = \frac{1}{1-it}$. $\varphi_{\frac{\xi}{E\xi}}(t) \to \varphi_Y(t)$, $p\to 0$. По Т. Леви о непр. соотв-ии м/у хар. ф. и ф-й распр.

9] Оценка скорости сх-ти в Т. Муавра-Лапласа.

По нер-ву Берри-Эссеена: $\sup_x \left| P\left(\frac{2}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - p) < x\right) - \Phi(x) \right| \le \frac{L_n^3 \cdot C}{\sqrt{n}}$, где $L_n^3 = \frac{E|X_1 - p|^3}{\sqrt{(p(1-p))^3}}$, C - некот. число, $\sup \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и $0{,}8$, неравенс-ее от расп-я. $E|X_1 - p|^3 = p^3(1-p) + p(1-p)^3 = (1-p)p \cdot (1 - 2p + 2p^2)$, $\Rightarrow$

$L_n^3 = \frac{(1-p)p(1-2p+2p^2)}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = \frac{(1-2p+2p^2)}{\sqrt{p(1-p)}}$. Найдем максимум L_n^3: $(L_n^3)' = \frac{(-1+4p)(p-p^2) - (1-2p)(1-2p+2p^2)}{\sqrt{(p(1-p))^3}} =$

$= \frac{2p-1}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow L_n^3 \le \frac{1-1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \sup_x \left| P\left(\frac{2}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - p) < x\right) - \Phi(x) \right| \le \frac{L_n^3 \cdot C}{\sqrt{n}} \le \frac{C}{\sqrt{n}}$

10] Пусть ξ_λ - сл. в., имеющая расп-е Пуассона с пар-ом $\lambda > 0$. Д-ть, $\frac{\xi_\lambda}{\lambda} \xrightarrow{P} 1$.

$E\xi_\lambda = \lambda$. $E\frac{\xi_\lambda}{\lambda} = 1$. $D\frac{\xi_\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$. применим нер-во Чебышева $P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) < \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\lambda\varepsilon^2}$, т.к. $\lambda \to \infty$ по усл., то правая часть стр-ся к нулю. $\Rightarrow$ вер-ть того, что сл.в. отл-ся от своего мат.ожидания (от 1) больше чем на ε равна 0 $\Rightarrow \frac{\xi_\lambda}{\lambda} \xrightarrow{P} 1$.

11] Д-ть, $E|\xi - a| \ge E|\xi - \operatorname{med}\xi|$, $\forall a \in \mathbb{R}$ и $\forall \xi$ с кон-ми мат. ожиданиями.

1) $a > \operatorname{med}\xi$. $\Rightarrow |\xi - a| - |\xi - \operatorname{med}\xi| = \begin{cases} \operatorname{med}\xi - a, & \xi \in [a, +\infty) \\ a + \operatorname{med}\xi - 2\xi, & \xi \in (\operatorname{med}\xi, a) \\ a - \operatorname{med}\xi, & \xi \in (-\infty, \operatorname{med}\xi] \end{cases}$. т.к. $a + \operatorname{med}\xi - 2\xi > \operatorname{med}\xi - a$, при $\operatorname{med}\xi < \xi < a$

то $E|\xi - a| - E|\xi - \operatorname{med}\xi| = E[|\xi - a| - |\xi - \operatorname{med}\xi|] \ge$

$\ge (\operatorname{med}\xi - a) \cdot P(\xi \ge a) + (\operatorname{med}\xi - a) \cdot P(\operatorname{med}\xi < \xi < a) + (a - \operatorname{med}\xi) \cdot P(\xi \le \operatorname{med}\xi) = (a - \operatorname{med}\xi)[P(\xi \le \operatorname{med}\xi) - (P(\xi \ge a) +$

$+ P(\operatorname{med}\xi < \xi < a))] = (a - \operatorname{med}\xi)[P(\xi \le \operatorname{med}\xi) - P(\xi > \operatorname{med}\xi)] \ge 0 \Rightarrow E|\xi - a| \ge E|\xi - \operatorname{med}\xi|$

2) если $a < \operatorname{med}\xi$. - аналогично.

12] $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - сл. в. Д-ть, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \iff \lim_{n\to\infty} E\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} = 0$

$\Rightarrow$ $P(|\xi_n| \ge \varepsilon) = \int_{|x| \ge \varepsilon} d\Phi_n(x) \ge \int_{|x| \ge \varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) - \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) \ge \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) \Rightarrow$

$0 \le E\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} \le \varepsilon^2 + P(|\xi_n| \ge \varepsilon)$. $\Leftarrow$ $P(|\varepsilon\xi_n| \ge \varepsilon) = \int_{|x|\ge\varepsilon} d\Phi_n(x) \le \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) \le \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \cdot E\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2}$

13] Д-ть, что усл-е Линдеберга влечет усл-е предельной малости:

Пусть вып-ся усл. Линдеберга. $\forall \tau > 0$ $\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k| > \tau \cdot B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Д-ть, что $P\left(\max_{1\le k\le n} \left|\frac{X_k - a_k}{B_n}\right| > \varepsilon\right) \to 0, \forall \varepsilon > 0$. Итак: $P\left(\left|\frac{X_k - a_k}{B_n}\right| > \tau\right) \le P(|X_k - a_k| > \tau \cdot B_n) = \int_{|X_k - a_k| > \tau \cdot B_n} dF_k(x) \le \frac{1}{(\tau \cdot B_n)^2} \int_{|X_k - a_k| > \tau B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x)$.

$P\left(\max_{1\le k\le n} \left|\frac{X_k - a_k}{B_n}\right| > \tau\right) \le \frac{1}{\tau^2 \cdot B_n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \int_{|X_k - a_k| > \tau \cdot B_n} (x-a_k)^2 dF_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. т.к. $P(\max_{1\le k\le n} A_k > \tau) = P(A_1 > \tau \cup A_2 > \tau \cup \ldots \cup A_n > \tau) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k > \tau)$

14] Д-ть, что усл-я Ляпунова влечет усл-е Линдеберга.

Т. Ляпунова: Если для посл-ти нез. сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ можно подобрать $\delta > 0$: $\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\lim_{n\to\infty} P(\eta_n < x) = \Phi(x)$. Область инт-ия опр-ся нер-ом $\frac{|x - a_k|}{\tau \cdot B_n} \ge 1$, поэтому при $\forall \delta > 0$ $\frac{|x-a_k|^\delta}{\tau^\delta B_n^\delta} \ge 1$.

$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k| \ge \tau B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) \le \frac{1}{B_n^2 \cdot (\tau \cdot B_n)^\delta} \cdot \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k| \ge \tau \cdot B_n} (x-a_k)^{2+\delta} dF_k(x) \le \frac{1}{\tau^\delta \cdot B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |x-a_k|^{2+\delta} dF_k(x) = \frac{1}{\tau^\delta \cdot B_n^{2+\delta}} \cdot \sum_{k=1}^{n} E|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \to$

$\to 0, \forall \tau > 0 \Rightarrow$ вып-ся усл. Линд. $\eta_n = \frac{\xi_1 - a_1 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n}$

15] Д-ть, сх-ть ф-ий расп-я в ЦПТ равномерная.

Пусть $F_n \Rightarrow F$ и $F(x)$ непр-на. Тогда $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $m > \frac{1}{\varepsilon}$.

В силу непр-ти $F(x)$ сущ-т $x_1, \ldots, x_m$: $F(x_i) = \frac{i}{m}$ и $|F_n(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon$ для дост-но большого n.

Тогда $\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$ $(x_0 = -\infty, x_m = +\infty)$ $F_n(x) - F(x) \le F_n(x_{k+1}) - F(x_k) \le F(x_{k+1}) - F(x_k) + \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{m} < 2\varepsilon$

$F(x) - F_n(x) \le F(x_{k+1}) - F_n(x_k) \le F(x_{k+1}) - F(x_k) + \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{m} < 2\varepsilon \Rightarrow |F_n(x) - F(x)| < 2\varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$

16] Пусть $\Phi(x)$ - станд. норм. ф. расп., $\varphi(x)$ - соотв. ей плотность расп. Д-ть, $\Phi(x) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \le 1 - \Phi(x) \le \frac{\varphi(x)}{x}$. $x > 0$

1) $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \underbrace{e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{y^2}\right\}}_{f(x)} dy$ (*). $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left\{-\frac{2x}{2x} - \frac{1}{x^2}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{x^2}\right\} = -f(x)$.

$\int_x^\infty F'(y) dy = \int_x^\infty -f(y) dy \Rightarrow -F(x) = -\int_x^\infty f(y) dy \Rightarrow$ (*) - верно.

$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{y^2}\right\} dy = \frac{\Phi(x)}{x}$. 2) $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right\}}_{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left\{1 - \frac{3}{y^4}\right\}}_{f(x)} dy$ (**).

$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left\{\frac{-x^4+3}{x^4}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{1 - \frac{3}{x^4}\right\} = -f(x) \Rightarrow \int_x^\infty F'(y) dy = \int_x^\infty -f(y) dy = -F(x) = -\int_x^\infty f(y) dy \Rightarrow$ (**) верно.

$\Phi(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = -\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1 - \frac{3}{y^4}\right\} \le 1 - \Phi(x) \Rightarrow$ двойное нер-во д-но.

17] Вычислить дифф-ую энтропию норм-го расп-я с пар-ми $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$ (стандартного нормального $a = 0, \sigma^2 = 1$)

$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = -\log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} + \frac{\log e}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} dx =$

$= \left\{\frac{x-a}{\sigma} = t, dx = \sigma dt\right\} = \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\log e}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t^2 dt = \left\{\begin{matrix} u = t, du = dt \\ dv = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt, v = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{matrix}\right\} = \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}} \cdot (0 + \sqrt{2\pi}) = \log(\sigma\sqrt{2\pi e})$

18 Что больше: неопределенность распределения сл.в., принимающ-й зн-я 0 и 1 с равными вероятностями, или неопределенность расп-я сл.в. величины, принимающей зн-я −1, 0 и 1 с вер-ми 0,25, 0,5 и 0,25, соотв-но?

Энтропия ребра $H(X) = -\sum p_i \cdot \log p_i$. Вычислим энтр-ю расп-я сл.в., прин-й зн-я 0 и 1 с равными вер-ми: $-H(X) = 0{,}5 \cdot \log 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \log 0{,}5 = \log 0{,}5$.
Вычислим энтр-ю сл.в., прин-й зн-я −1, 0 и 1 с вер-ми 0,25, 0,5, 0,25 соотв-но:
$-H(\xi) = 0{,}25 \cdot \log 0{,}25 + 0{,}5 \cdot \log 0{,}5 + 0{,}25 \cdot \log 0{,}25 = 0{,}5 \cdot (\log 0{,}25 + \log 0{,}5) = 0{,}5 \cdot \log 0{,}125$.
$H(\xi) = -1{,}5 \cdot \log 0{,}5 > -\log 0{,}5 = H(X)$

19 Что больше: дифф. энтропия расп-я, равномерного на $[0,1]$, или дифф. энтропия показат-го расп-я с параметром $\lambda = 2$?

Вычислим дифф. энтропию показ-го расп-я: $H(X) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \log(\lambda \cdot e^{-\lambda x})^{-1} dx = -\log\lambda \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \lambda \log e \int_0^{+\infty} \lambda x \cdot e^{-\lambda x} dx = \log \lambda \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \lambda \cdot \log e \cdot \int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} d(\lambda x) = -\log\lambda + 1 \cdot \log e \cdot (-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx) = -\log\lambda - (\log e) e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = -\log\lambda + \log e = \log\frac{e}{\lambda}$; при $\lambda = 2$, $H(X) = \log\frac{e}{2}$. Вычислим дифф. энтропию равн-го на $[0,1]$ расп-я: $p(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x\in[0,1] \\ 0, & 1<x \end{cases}$
$H(X) = \int_0^1 1 \cdot x \cdot \log 1 \, dx = 0$ ∀ основания логарифма. Если в дифф. энтропии показ-го расп-я возьмем основание 2, то очев-но, что $\log_2 \frac{e}{\lambda} > 0$. Т.е. энтр. показат. > энтр. равн.

20 $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ – НОР сл.в. с $E\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2 < \infty$. N – целочисл. полож. сл.в., независ. от посл-ти $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ и имеющая 2й момент. Обозн. $S_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$. Выр-ть DS_N через моменты индекса и слагаемых.
$DS_N = E(S_N - ES_N)^2 = ES_N^2 - (ES_N)^2 = E[E(S_N^2 \mid N)] - (E\xi_1)^2 \cdot (EN)^2$. $E(S_n^2 \mid N = n) = ES_N^2 = DS_n + (ES_n)^2 = n \cdot D\xi_1 + n^2 \cdot (E\xi_1)^2$
$\Rightarrow E(S_N^2 \mid N) = N \cdot D\xi_1 + N^2 (E\xi_1)^2 \Rightarrow DS_N = E(N \cdot D\xi_1 + N^2 (E\xi_1)^2) - (E\xi_1)^2 \cdot (EN)^2 = EN \cdot D\xi_1 + (E\xi_1)^2 E(N^2 - (EN)^2) = \sigma^2 EN + a^2 DN$

21 Сколько респондентов надо опросить, чтобы опр-ть рейтинг полит. деятеля с точностью 0,1% и надежностью 0,95?
$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - p\right| \le \varepsilon$. $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| \le \varepsilon\right) \ge \gamma$. $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| \le \varepsilon\right) \ge \frac{1 - D(\frac{1}{n}\sum X_i)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{p(p-1)}{\varepsilon^2 n} \ge \gamma$. $\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \le 1 - \gamma \Rightarrow$
$\Rightarrow n \ge \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2(1-\gamma)}$. $n \ge \frac{1}{4\varepsilon^2(1-\gamma)}$. при $\varepsilon = 0{,}001$ и $\gamma = 0.95$ отв: 5 000 000.

22 Найти к-т эксцесса нормального распр-я $N(0,2)$.
$\varkappa(Z) = E\left(\frac{Z - EZ}{\sqrt{DZ}}\right)^4$. $EZ = 0$. $DZ = 2$. $\varkappa(Z) = E\left(\frac{Z-0}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{EZ^4}{(\sqrt{2})^4} = \frac{EZ^4}{4}$. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot 2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$.
$EX^4 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X^4 \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \, d(e^{-\frac{x^2}{4}}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot (x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} dx = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} dx = \frac{-3}{\sqrt{\pi}} \int x \cdot d(e^{-\frac{x^2}{4}})$
$= -\frac{6}{\sqrt{\pi}} \left(x \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} dx\right) = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} dx = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{12}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 12$. отв: $\varkappa(Z) = \frac{12}{4} = 3$.

23 Пусть $X \sim N(0,1)$, $Y = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ 3, & 1/4 \\ 5, & 1/4 \end{cases}$, $Z = XY$. Найти EZ.
$P(Z < x) = P(XY < x) = P\left(X < \frac{x}{Y}\right) = P\left(X < \frac{x}{Y} \mid Y = 1\right) \cdot P(Y=1) + P\left(X < \frac{x}{Y} \mid Y = 3\right) \cdot P(Y=3) + P\left(X < \frac{x}{Y} \mid Y = 5\right) \cdot P(Y=5) = P(X<x) \cdot \frac{1}{2}$
$+ P\left(X < \frac{x}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} + P\left(X < \frac{x}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = F(x) \cdot \frac{1}{2} + F\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} + F\left(\frac{x}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \varphi(x) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \varphi\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \varphi\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \varphi(x) + \frac{1}{12}\varphi\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{20}\varphi\left(\frac{x}{5}\right)$
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. $f_{XY}(x) = F'_{XY}(x) =$ через φ. $E\,Z = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{XY}(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx + \frac{1}{12} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{18}} dx +$
$+ \frac{1}{20} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{50}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots\right)$ все подинт. ф-ии нечетные $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0+0+0) = 0$.

24. Д-ть, $P(|X - a| < 3\sigma) \ge \frac{8}{9}$ при $EX = a$, $DX = \sigma^2$.
По нер-ву Чебышева: $P(|\xi - E\xi| \ge \varepsilon) \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$. $P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) = 1 - P(|\xi - E\xi| \ge \varepsilon) \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$. $\varepsilon = 3\sigma \Rightarrow \varepsilon^2 = 9\sigma^2$
$DX = \sigma^2$. $\Rightarrow P(|X - a| < 3\sigma) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} \ge \frac{8}{9}$.

25 Найти дисперсию пуассоновской суммы Σ.
$N \sim \Pi(\lambda)$. $EN = DN = \lambda$. S_N – пуас. случ. сумма Σ. $ES_N = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial \psi(\varphi(t))}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{EN} \Big|_{t=0} = EN \cdot EX_i$.
$ES_n^2 = -\frac{\partial^2 \psi(\varphi(t))}{(\partial t)^2}\Big|_{t=0} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} = -\frac{\partial^2 \psi}{(\partial f)^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\Big|_{t=0} - \frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = -E[N(N-1)i^2(EX_i)^2] - EN \cdot (-EX_i^2) =$
$= EN^2 (EX_i)^2 - EN \cdot (EX_i^2) + EN \cdot EX_i^2 = EN^2 \cdot (EX_i)^2 + EN \cdot DX_i$. $DS_N = ES_N^2 - (ES_N)^2 = EN \cdot DX_i + DN \cdot (EX_i)^2$. $DX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2$. $DS_N = \lambda EX_i^2 - \lambda (EX_i)^2 + \lambda (EX_i)^2 = \lambda EX_i^2$.

26 Найти дифф. энтропию $\exp(1)$.
$H(X) = -E \log p(x)$. $p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. $H(X) = -E \log p(x) = -\int_0^{+\infty} \log p(x) \cdot e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} (-x) \cdot e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x}\Big|_0^{+\infty} +$
$+ \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$

27 | Док-ть, $|E\xi - \mathrm{med}\,\xi| \le \sqrt{D\xi}$.

$|E\xi - \mathrm{med}\,\xi| \le$ {нер-во Йенсена} $\le E|\xi - \mathrm{med}\,\xi| \le$ (↓д-ем далее) $E|\xi - E\xi| \le$ {нер-во Ляпунова} $\le \sqrt{E(\xi - E\xi)^2} = \sqrt{D\xi}$. $E|\xi - a| \to \min$.

$\exists\, a > \mathrm{med}\,\xi$: $|\xi - a| - |\xi - \mathrm{med}\,\xi| = \begin{cases} \mathrm{med}\,\xi - a, & \xi \ge a \\ a - \mathrm{med}\,\xi, & \xi \le \mathrm{med}\,\xi \\ \mathrm{med}\,\xi + a - 2\xi, & \mathrm{med}\,\xi < \xi < a \end{cases}$. $\xi \in (\mathrm{med}\,\xi, a) \Rightarrow \mathrm{med}\,\xi + a - 2\xi \ge \mathrm{med}\,\xi - a$. $E|\xi - a| - E|\xi - \mathrm{med}\,\xi| = E(|\xi - a| - |\xi - \mathrm{med}\,\xi|) \ge (\mathrm{med}\,\xi - a) E\mathbb{I}(\xi \ge a) + (\mathrm{med}\,\xi - a) E\mathbb{I}(\xi \in (\mathrm{med}\,\xi, a)) + (a - \mathrm{med}\,\xi) \cdot E\mathbb{I}(\xi \le \mathrm{med}\,\xi) =$

$= (\mathrm{med}\,\xi - a) \cdot P(\xi > \mathrm{med}\,\xi) + (a - \mathrm{med}\,\xi) \cdot P(\xi \le \mathrm{med}\,\xi) = \underbrace{(a - \mathrm{med}\,\xi)}_{>0}\underbrace{(P(\xi \le \mathrm{med}\,\xi) - P(\xi > \mathrm{med}\,\xi))}_{\ge 0} \Rightarrow \underline{E(|\xi - a|) \ge E|\xi - \mathrm{med}\,\xi|}$ по опр. $\mathrm{med}\,\xi$

28 | Найти дисперсию суммы, если $E\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$, $EN = \frac{1-p}{p}$, $DN = \frac{1-p}{p^2}$.

$ES_N = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial \psi(f(t))}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{i} \cdot \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial f}}_{EN} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{iEX_i}\Big|_{t=0} = EN \cdot EX_i$. $ES_N^2 = -\frac{\partial^2 \psi(f(t))}{(\partial t)^2}\Big|_{t=0} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} = -\frac{\partial^2 \psi}{(\partial f)^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\Big|_{t=0} - \frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Big|_{t=0} =$

$= -E[N(N-1)][-(EX_i)^2] - EN(-EX_i^2) = EN^2(EX_i)^2 - EN \cdot (EX_i)^2 + EN \cdot EX_i^2 = EN^2(EX_i)^2 + EN\,DX_i$. $DS_N = ES_N^2 - (ES_N)^2 = EN \cdot DX_i + DN \cdot (EX_i)^2$. $DX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2$. $DS_N = \frac{1-p}{p} \cdot \sigma^2 + \frac{1-p}{p^2} \cdot a^2 = \frac{1-p}{p^2}(p\sigma^2 + a^2)$.

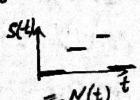
29 | Найти энтропию $y = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ 2, & 1/4 \\ 3, & 1/8 \\ 4, & 1/8 \end{cases}$.

$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_a p_i = -\frac{1}{2} \cdot \log_a \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log_a \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log_a \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \log_a \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\log_a 2 + \frac{1}{4}\log_a 4 + \frac{1}{8}\log_a 8 + \frac{1}{8}\log_a 8 = \frac{7}{4}\log_a 2$, $a > 1$

30 | $X_1, X_2, \ldots$ – НОР сл.в., $f(t)$ – хар.ф. X_i, $N \sim \Pi(1)$. $N, X_1, X_2, \ldots$ – нез. сл.в.. Найти f_{S_N}.

$f_{S_N}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot dF_{S_N}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot d\left(\sum_0^{\infty} p_n \cdot F^{*n}(x)\right) =$ {т.к. ряд сх-ся равн-но, можно почленно инт-ть: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF^{*n}(x) = Ee^{it(X_1 + \ldots + X_n)} = (f(t))^n$} $=$

$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot f^n(t) = \psi(f(t))$. $\psi(s)$ – произв. ф-я N, т.к. $N \sim \Pi(1)$. $\psi(s) = e^{\lambda(s-1)} = e^{s-1}$. $f_{S_N} = \psi(f(t)) = e^{f(t)-1}$.

31 | 

обобщ. пр-с Коши (скачки произвольные)

процесс Коши (скачки = 1)

32 | $N_1(t)$ – станд-й пуасс-й пр-с (с интенсивностью 1). Λ – положит. сл.в., имеет конечный второй момент и нез-ма от $N_1(t)$. Выразить $DN_1(\Lambda)$ через моменты сл.в. Λ.

$EN = \sum_{k=0} k \cdot P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\, dU(\lambda) \overset{\text{распр. }\Lambda}{=} \int_0^{\infty} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}}\Big) dU(\lambda) = \int_0^{\infty} \lambda\, dU(\lambda) = E\Lambda$. $\llcorner\!\lrcorner = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$.

$DN = EN^2 - (EN)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\, dU(\lambda) - (E\Lambda)^2 = \int_0^{\infty} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}}\Big) dU(\lambda) - (E\Lambda)^2 = \int_0^{\infty} (\lambda^2 + \lambda)\, dU(\lambda) - (E\Lambda)^2 = E\Lambda^2 + E\Lambda - (E\Lambda)^2 = D\Lambda + E\Lambda$

{$\sim\sim = \sum (k-1+1)\lambda^k/(k-1)! = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum \frac{\lambda^{k}}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$}

Задача 1

Условие

Доказать, что $\mathbb{E}|\xi-a| \geq \mathbb{E}|\xi-med\xi|$ для $\forall a \in \mathbb{R}$ и для любой случайной величины ξ с конечным математическим ожиданием.

Решение

Решение из учебника: Королев В.Ю. «Теория вероятностей и математическая статистика»(стр. 43)

Докажем, что $\mathbb{E}|\xi-med\xi| \leq \mathbb{E}|\xi-a|$

- Рассмотрим случай $a>med\xi$. Тогда

$$|\xi-a|-|\xi-med\xi| = \begin{cases} med\xi-a & \xi \in [a,\infty) \\ a+med\xi-2\xi & \xi \in (med\xi,a) \\ a-med\xi & \xi \in (-\infty,med\xi] \end{cases}.$$

Так как $a+med\xi-2\xi>med\xi-a$ при $med\xi<\xi<a$, то

$$\begin{gathered} \mathbb{E}|\xi-a|-\mathbb{E}|\xi-med\xi| = \mathbb{E}[|\xi-a|-|\xi-med\xi|] \geq \\ \geq (med\xi-a)\mathbb{E}\mathbb{1}_{[a,\infty)}(\xi)+(med\xi-a)\mathbb{E}\mathbb{1}_{(med\xi,a)}(\xi)+(a-med\xi)\mathbb{E}\mathbb{1}_{(-\infty,med\xi]}(\xi) = \\ = (med\xi-a)P(\xi \geq a)+(med\xi-a)P(med\xi<\xi<a)+(a-med\xi)P(\xi \leq med\xi) = \\ = (a-med\xi)[P(\xi \leq med\xi)-P(\xi>med\xi)] \geq 0 \end{gathered}.$$

Последнее неравенство вытекает из определения медианы.

- Случай $a<med\xi$ рассматривается аналогично.

2 R_ξ – интерквартильная разница сл.в ξ с конеч. вторым моментом, $D\xi = \sigma^2$ Док-ть $R_\xi \le 4\sigma$

□ $R_\xi = \ell(3/4) - \ell(1/4)$

$\begin{cases} P(\xi \le \ell(q)) \ge q \\ P(\xi \ge \ell(q)) \ge 1-q \end{cases}$

Рассмотрим нер-во Чебышева

$$P(|\xi - E\xi| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Выберем ε т.ч. $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(E\xi - \varepsilon \le \xi \le E\xi + \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\varepsilon = 2\sigma$

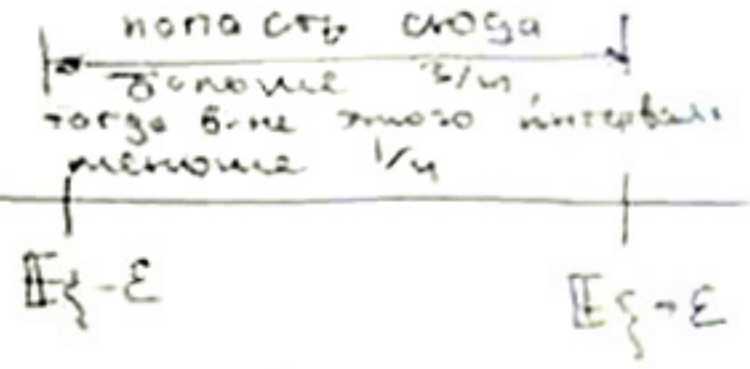
$2\varepsilon = 4\sigma$

длина интервала 2ε и равна 4σ.

Покажем, что $\ell(1/4)$ и $\ell(3/4)$ лежат внутри этого интервала.

- $P(\xi < E\xi - \varepsilon) \le 1 - 3/4 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

попасть слева больше $3/4$, тогда вне этого интервала меньше $1/4$

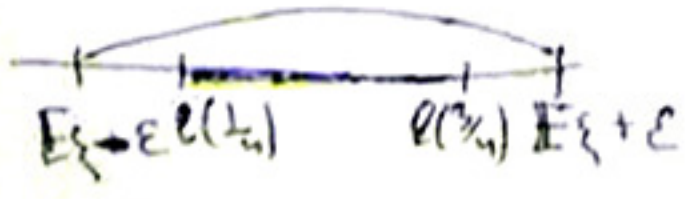


если $\ell(1/4) < E\xi - \varepsilon$, то $P(\xi \le \ell(\frac{1}{4})) \le \frac{1}{4}$, но по опред квартили $\ell(\frac{1}{4})$: $P(\xi \le \ell(\frac{1}{4})) \ge \frac{1}{4}$ (?!)

$\Rightarrow \ell(1/4) \ge E\xi - \varepsilon$

- Вам $P(\xi > E\xi + \varepsilon) \le 1 - 3/4 = 1/4 \Rightarrow$
если $\ell(3/4) > E\xi + \varepsilon$, то $P(\xi \ge \ell(3/4)) \le \frac{1}{4}$, но по опред квартили $\ell(3/4)$: $P(\xi \ge \ell(3/4)) \ge \frac{1}{4}$ (?!)

$\Rightarrow \ell(3/4) \le E\xi + \varepsilon$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow 2\varepsilon = 4\sigma \ge \ell(3/4) - \ell(1/4) = R_\xi$

$\boxed{4\sigma \ge R_\xi}$

Задача 3

Условие

Пусть $\xi_1, \xi_2, \cdots$ - случайные величины. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда. когда

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E} \frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} = 0 .$$

Решение

Необходимость:

$$\mathbb{P}(|\xi_n| \geq \varepsilon) = \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} d\,\Phi_n(x) \geq \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) - \int\limits_{|x| < \varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) \geq \int \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi,$$

Следовательно

$$0 \leq \mathbb{E} \frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} \leq \varepsilon^2 + \mathbb{P}(|\xi_n| \geq \varepsilon)$$

Достаточность:

$$\mathbb{P}(|\xi_n| \geq \varepsilon) = \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} d\,\Phi_n(x) \leq \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) \leq \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2}$$

(4) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — н.о.р.с.в., имеющие распр Коши.

Док-ть, что $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j \overset{d}{=} \xi_1$

$\square$ $f_{\xi_1}(t) = e^{-|t|}$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\xi_j$$

$$f_{\frac{S_n}{n}}(t) = \mathbb{E}\, e^{it\frac{S_n}{n}} = \mathbb{E}\, e^{i\frac{t}{n}(\xi_1+\ldots+\xi_n)} = \left(f\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(e^{-\frac{|t|}{n}}\right)^n = e^{-|t|} = f_{\xi_1}(t) = e^{-|t|} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ распред $\frac{S_n}{n}$ и ξ_1 также равны

$\blacksquare$

5 Рассмотрим $\mathbb{P}(|X_k - a_k| > \varepsilon B_n)$. $\varepsilon^2 B_n^2 = \varepsilon^2 B_n \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} dF_k(x) =$

$$= \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} \varepsilon^2 B_n^2 \, dF_k(x) \leq \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} |x-a_k|^2 \, dF_k(x)$$

$$\mathbb{P}(|X_k - a_k| > \varepsilon B_n) \leq \frac{1}{B_n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} |x-a_k|^2 \, dF_k(x) \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ условие равном. пред. малости (следует из условия Линдеберга).

Задача 6

Условие

Доказать, что из условия Ляпунова вытекает условие Линдеберга.

Решение

Теорема 4. (Ляпунова) Если для последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

то $\lim\limits_{n \to \infty} P(\eta_n < x) = F(x)$.

при использовании того, что область интегрирования определяется неравенством

$$\frac{|x - a_k|}{\tau B_n} \geq 1$$

и поэтому при любом $\delta > 0$

$$\frac{|x - a_k|^{\delta}}{\tau^{\delta} B_n^{\delta}} \geq 1.$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x - a_k| \geq \tau B_n} (x - a_k)^2 \, dF_{\xi_k}(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{B_n^2 (\tau B_n)^{\delta}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x - a_k| \geq \tau B_n} (x - a_k)^{2+\delta} \, dF_{\xi_k}(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\tau^{\delta} B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x - a_k|^{2+\delta} \, dF_{\xi_k}(x) =$$

$$= \frac{1}{\tau^{\delta} B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad \forall \tau > 0$$

Что означает выполнение условия Линдеберга.

Задача 7

Условие

Доказать, что сходимость функции распределения в центральной предельной теореме равномерная.

Решение

Пусть $F_n \Rightarrow F$ и $F(x)$ непрерывна, тогда $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0, n \to \infty$.

$\forall \varepsilon > 0$ возьмем $m > \frac{1}{\varepsilon}$

В силу непрерывности $F(x)$ существуют $x_1, \ldots, x_n : F(x_i) = \frac{i}{m}$ и $|F_n(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon$ для достаточно большого n.

Тогда $\forall x \in [x_k, x_{k+1}] (x_0 = -\infty, x_m = \infty)$

$$F_n(x) - F(x) \leq F_n(x_{k+1}) - F(x_k) \leq F(x_{k+1}) - F(x_k) + \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{m} < 2\varepsilon$$

$$F(x) - F_n(x) \leq F(x_{k+1}) - F_n(x_k) \leq F(x_{k+1}) - F(x_k) + \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{m} < 2\varepsilon$$

Следовательно $|F_n(x) - F(x)| < 2\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$.

8] $\Phi(x)$ - станд норм Ф-я распределения,
$\varphi(x)$ - соотв-ая плотность

<u>Док-ть</u> $\varphi(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) \underset{(2)}{\leq} 1-\Phi(x) \underset{(1)}{\leq} \frac{\varphi(x)}{x}, x>0$

1) □ $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{x}}_{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{\infty} \underbrace{e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1+\frac{1}{y^2}\right\}}_{f(x)} dy$ (*)

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{-\frac{2x}{2x} - \frac{1}{x^2}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{1+\frac{1}{x^2}\right\} = -f(x)$$

$$\int\limits_x^{\infty} F'(y)\,dy = \int\limits_x^{\infty} -f(y)\,dy \Rightarrow -F(x) = -\int\limits_x^{\infty} f(y)\,dy$$

$\Rightarrow$ (*) верно.

$$\Rightarrow 1-\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1+\frac{1}{y^2}\right\} dy = \frac{\varphi(x)}{x}$$ ■

2) □ $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right\}}_{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{\infty} \underbrace{e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1-\frac{3}{y^4}\right\}}_{f(x)} dy$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{-\frac{2x}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left\{-1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-\frac{3}{x^4}\right) = -f(x)$$ (**)

$$\int\limits_x^{\infty} F'(y)\,dy = \int\limits_x^{\infty} -f(y)\,dy = -F(x) = -\int\limits_x^{\infty} f(y)\,dy \Rightarrow (**) \text{ верно}$$

$$\varphi(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left\{1-\frac{3}{y^4}\right\} < 1-\Phi(x).$$ ■

$\Rightarrow$ двойное нер-во доказано.

Задача 9

Условие

Какова скорость сходимости в теореме Муавра-Лапласа.

Решение

По неравенству Берри-Эссена:

$\sup_x \left| P\left(\frac{2}{\sqrt{np(1-p)}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - p) < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{L_n^3 * C}{\sqrt{n}}$, где $L_n^3 = \frac{\mathbb{E}|X_1 - p|^3}{\sqrt{(p(1-p))^3}}$,а C - некоторое число между $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и 0.8, независящее от распределения.

$\mathbb{E}|X_1 - p|^3 = p^3(1-p) + p(1-p)^3 = (1-p)p(1-2p+2p^2)$, следовательно $L_n^3 = \frac{(1-p)p(1-2p+2p^2)}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = \frac{(1-2p+2p^2)}{\sqrt{p(1-p)}}$

Найдем максимум L_n^3:

$(L_n^3)' = \frac{(-2+4p)(p-p^2) - (1-2p)(1-2p+2p^2)}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = \frac{2p-1}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow L_n^3 \leq \frac{1-1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ поэтому:

$\sup_x \left| P\left(\frac{2}{\sqrt{np(1-p)}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - p) < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{L_n^3 * C}{\sqrt{n}} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$

Задача 10

Условие

Пусть ξ_λ - случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что

$$\frac{\xi_\lambda}{\lambda} \xrightarrow{P} 1$$

при $\lambda \to \infty$.

Решение

$\mathbb{E}$ распределения пуассона = λ

$$\mathbb{E}\frac{\xi_\lambda}{\lambda} = 1$$

$$\mathbb{D}\frac{\xi_\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

применим теперь неравенство Чебышева $P(\ |\xi - \mathbb{E}\xi| > \epsilon \ ) < \frac{\mathbb{D}\xi}{\epsilon^2} = \frac{1}{\lambda\epsilon^2}$, но так как у нас по условию λ стремится к бесконечности, то правая часть стремится к нулю

в итоге вероятность того, что случайная величина отличается от своего матожидания (от 1) больше чем на ϵ равна нулю, а значит

$$\frac{\xi_\lambda}{\lambda} \xrightarrow{P} 1$$

Задача 11

Условие

Пусть ξ_λ - случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что

$$P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right) \longrightarrow \Phi(x)$$

при $\lambda \to \infty$.

Решение

Так как характеристическая функция стандартного нормального распределения равна $e^{\frac{-t^2}{2}}$, то, по теореме Леви, о непрерывном соответствии между х.ф и ф.р., достаточно показать, что при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$

$f^*_\lambda(t) = \mathbb{E}e^{it\xi^*_\lambda} \to e^{\frac{-t^2}{2}}$, $\lambda \to \infty$, где $\xi^*_\lambda = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$

Характеристическая функция распределения Пуассона имеет вид:

$$f_\lambda(t) = \mathbb{E}e^{it\xi_\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda(e^{it}-1))$$

Поэтому

$$f^*_\lambda(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} f_\lambda(t\lambda^{-1/2}) = \exp(-it\sqrt{\lambda} + \lambda(e^{it\lambda^{-1/2}}-1))$$

Таким образом, раскладывая экспоненту(внутреннюю) в ряд Тейлора, при $\lambda \to \infty$ получим

$$f^*_\lambda(t) = \exp(-it\sqrt{\lambda} + \lambda(it\lambda^{-1/2} + (it)^2(2\lambda)^{-1} + o(t^2\lambda^{-1}))) \to e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Задача 12

Условие

Пусть ξ_a - случайная величина, имеющая геометрическое распределение с математическим ожиданием, равным a. Доказать, что

$$\lim_{a\to\infty} \mathbb{P}(a^{-1}\xi_a < x) = 1-e^{-x},\ x>0.$$

Решение

ξ: $P(\xi=k)=p(1-p)^k$.

Надо доказать, что $P\left(\frac{\xi}{\mathbb{E}\xi} < x\right) = 1 - e^{-x}$, $x>0$;

$\phi_\xi(t)=\frac{p}{1-qe^{it}}$

$\lim\limits_{p\to 0}\phi_{\frac{\xi}{\mathbb{E}\xi}}(t)=\Big\{$Т.к. если $Y=aX$, то $\Phi_Y(t)=\Phi_X(at)$ и для геометрического распределения $\mathbb{E}\xi=\frac{q}{p}\Big\}=\lim\limits_{p\to 0}\frac{p}{1-qe^{\frac{itp}{q}}}=\Big\{$Разложим экспоненту в ряд Тейлора $\Big\}=\lim\limits_{p\to 0}\frac{p}{1-q(1+\frac{itp}{q})}=\frac{1}{1-it}$;

Y: $P(Y<x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

$\phi_Y(t)=\frac{1}{1-it}$

Следовательно $\phi_{\frac{\xi}{\mathbb{E}\xi}}(t) \longrightarrow \phi_Y(t),\ p\to 0$. По теореме Леви, о непрерывном соответствии между х.ф и ф.р. получаемм доказательство.

Задача 13

Условие

Что больше: неопределенность распределения случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с равными вероятностями, или неопределенность распределения случайной величины, принимающей значения -1, 0 и 1 с вероятностями 0.25, 0.5 и 0.25, соответственно?

Решение

Энтропия равна $H(X) = -\sum p_i * \log p_i$

Вычислим энтропию распределения случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с равными вероятностями:

$$-H(X) = 0.5*\log 0.5 + 0.5*\log 0.5 = \log 0.5$$

Вычислим энтропию случайной величины, принимающей значения -1, 0 и 1 с вероятностями 0.25, 0.5 и 0.25, соответственно:

$$-H(\xi) = 0.25*\log 0.25 + 0.5*\log 0.5 + 0.25*\log 0.25 = 0.5*(\log 0.25 + \log 0.5) = 0.5*\log$$

$$H(\xi) = -1.5*\log 0.5 > -\log 0.5 = H(X)$$

14

Для любой ли абсолютно непрер случ. величины существует диф. энтропия?

Ответ: нет.

Контрпример: $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x}, & x \in [e, +\infty) \\ 0, & x \notin [e, +\infty) \end{cases}$

$$H(X) = -\mathbb{E} \log p(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log p(x) dx = \left| \begin{array}{l} \text{основ} \\ \log \\ \text{будем} \\ \text{равным} \\ e \end{array} \right|$$

$$= -\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \cdot \ln \frac{1}{x \ln^2 x} dx =$$

$$= \int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \left(\ln x + \ln \ln^2 x \right) dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = y \\ x = e^y \\ dx = e^y dy \end{array} \right|$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{e^y y^2} \left(y + \ln y^2 \right) \cdot e^y dy = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{y} + \frac{2 \ln y}{y^2} \right) dy$$

$$= \ln y \Big|_1^{\infty} + 2 \int_1^{\infty} \frac{\ln y}{y^2} dy = \left| \begin{array}{l} \ln y = z \\ y = e^z \\ dy = e^z dz \end{array} \right|$$

$$= \infty + 2 \int_{e^0}^{e^{\infty}} \frac{z}{e^{2z}} e^z dz = \infty + 2 \int_0^{\infty} z e^{-z} dx$$

$$= \infty - 2z e^{-z} \Big|_0^{\infty} - 2e^{-z} \Big|_0^{\infty} = \infty + 2 = \infty$$

$\Rightarrow$ диф. энтропии нет

Задача 15

Условие

Что больше: дифференциальная энтропия распределения, равномерного на [0, 1], или дифференциальная энтропия показательного распределения с параметром $\lambda = 2$?

Решение

- Вычислим дифференциальную энтропию показательного распределения:

$$H(X) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \log(\lambda e^{-\lambda x})^{-1} dx = -\log\lambda \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \lambda \log e \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \log\lambda e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \lambda \log e \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} d(\lambda x) & v = -e^{-\lambda x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\log\lambda + \lambda \log e(-x e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx) = -\log\lambda - (\log e) e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = -\log$$

При $\lambda = 2$ дифференциальная энтропия показательного распределения равна $\log\frac{e}{2}$

- Вычислим дифференциальную энтропию равномерного на [0, 1] распределения. Имеем:

$$p(X) = \begin{cases} 0, & X < 0 \\ 1, & 0 \le X \le 1 \\ 0, & 1 < X \end{cases}$$

$H(X) = \int_0^1 1 \times \log(1) dx = 0$ для любого основания логарифма.

- Если в дифференциальной энтрропии показательного распределения возьмем основание 2, то очевидно, что $\log_2 \frac{e}{2} > 0$

Задача 16

Условие

Вычислить дифференциальную энтропию нормального распределения с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$.

Решение

$$H(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= -\log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{\log e}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} dx = \left| \begin{matrix} \frac{x-a}{\sigma} = t \\ dx = \sigma dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^2 dt = \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = te^{-\frac{t^2}{2}} dt & v = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{matrix} \right| = \log(\sigma\sqrt{2\pi}) +$$

$$= \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}} (0 + \sqrt{2\pi}) = \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \log\sqrt{e} = \log(\sigma\sqrt{2\pi e}).$$

Задача 17

Условие

Пусть $\xi_1, \xi_2, \cdots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbb{E}\xi_1 = a$ и $\mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$. Пусть N - целочисленная положительная случайная величина, независимая от последовательности $\xi_1, \xi_2, \cdots$, и имеющая конечный второй момент. Обозначим $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Выразить $\mathbb{D}S_N$ через моменты индекса и слагаемых.

Решение

$$\mathbb{D}S_N = \mathbb{E}(S_N - \mathbb{E}S_N)^2 = \mathbb{E}S_N^2 - (\mathbb{E}S_N)^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}(S_N^2|N)] - (\mathbb{E}\xi_1)^2(\mathbb{E}N)^2$$

$$\mathbb{E}(S_N^2|N = n) = \mathbb{E}S_N^2 = \mathbb{D}S_n + (\mathbb{E}S_n)^2 = n\mathbb{D}\xi_1 + n^2(\mathbb{E}\xi_1)^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_N^2|N) = N\mathbb{D}\xi_1 + N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{D}S_N = \mathbb{E}(N\mathbb{D}\xi_1 + N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2) - (\mathbb{E}\xi_1)^2(\mathbb{E}N)^2 = \mathbb{E}N\mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{E}N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2(\mathbb{E}N$$

Ответ: $\mathbb{D}S_N = \sigma^2\mathbb{E}N + a^2\mathbb{D}N$

18

X имеет распределение Стьюдента с $n=10$

Сравнить коэф эксцесса X и Z

$$\chi_4 = \frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^4}{(\mathbb{D}X)^2} = \frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^4}{(\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2)^2}$$

$$f_X(x) = \boxed{\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\sqrt{10\pi}\,\Gamma(5)}} \cdot \left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-\frac{11}{2}}$$

$$\mathbb{E}X = A\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-\left(5+\frac{1}{2}\right)} dx = \left|\begin{array}{l}\Phi\text{-я подинтегр}\\ \text{нечетная}\end{array}\right| = \boxed{0}$$

$$\mathbb{E}X^2 = A\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-\left(5+\frac{1}{2}\right)} = 10A\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\right)^{-\left(5+\frac{1}{2}\right)} dx =$$

$$\cdot\left|\begin{array}{l}\frac{x}{\sqrt{10}}=t\\ dx=\sqrt{10}\,dt\end{array}\right| = 10\cdot\sqrt{10}\cdot A\cdot 2\int_0^{+\infty} t^2\left(1+t^2\right)^{-\left(5+\frac{1}{2}\right)} dt =$$

$$= \left|\begin{array}{l}t^2=z\\ 2t\,dt=dz\\ dt=\frac{dz}{2\sqrt{z}}\end{array}\right| = 10\cdot\sqrt{10}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot A\int_0^{+\infty} z^{\frac{1}{2}}\left(1+z\right)^{-\left(5+\frac{1}{2}\right)} dz =$$

$$= 10\cdot\sqrt{10}\cdot A\cdot B\left(\frac{3}{2},4\right) = 10\cdot\sqrt{10}\cdot A\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$$

$$= 10\cdot\cancel{\sqrt{10}}\cdot\frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}}{\cancel{\sqrt{10}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(5)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(4)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}} = \frac{10\cdot\frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{\pi}}}{4\cancel{\sqrt{\pi}}} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$\mathbb{E}X^4 = A\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\right)^{-\left(5+\frac{1}{2}\right)}dx = \left|\begin{array}{l}\frac{x}{\sqrt{10}} = t\\ dx = \sqrt{10}\,dt\end{array}\right| = A\cdot 100\cdot\sqrt{10}\cdot 2\cdot$$

$$\int_0^{+\infty} t^4\left(1+t^2\right)^{-\left(5+\frac{1}{2}\right)}dt = \left|\begin{array}{l}t^2 = z\\ dt = \frac{dz}{2\sqrt{z}}\end{array}\right| =$$

$$= A\cdot 100\cdot\sqrt{10}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} z^2\left(1+z\right)^{-\left(5+\frac{1}{2}\right)}\frac{dz}{\sqrt{z}} = 100\cdot\sqrt{10}\cdot A\int z^{\frac{3}{2}}\left(1+z\right)^{-\left(5+\frac{1}{2}\right)}dt$$

$$= 100\cdot\sqrt{10}\cdot A\,B\left(\frac{5}{2},3\right) = 100\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\Gamma(5)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} =$$

$$= \frac{100\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{4\cdot 3\sqrt{\pi}} = \boxed{\frac{25}{4}}$$

$$\chi_4 = \frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^4}{\left[\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2\right]^2} = \frac{\mathbb{E}X^4}{\left[\mathbb{E}X^2\right]^2} = \frac{25}{4}\cdot\frac{4^2}{5^2} = 4$$

$4 > 3 \Rightarrow$ **коэф эксцесса больше 3**

Задача 19

Условие

Пусть $N_1(t)$ - стандартный пуассоновский процесс(с интенсивностью 1). Пусть далее Λ - положительная случайная величина, имеет конечный второй момент и независима от N_1 (t). Выразить $\mathbb{D}N_1(\Lambda)$ через моменты случайной величины Λ.

Решение

$$N(t) = N_1(\Lambda)$$

$$\mathbb{E}N(t) = \int_0^\infty \mathbb{E}N_1 \lambda dP(\Lambda < \lambda) = \int_0^\infty \lambda dP(\Lambda < \lambda) = \mathbb{E}\Lambda$$

$$\mathbb{D}N(t) = \mathbb{E}N^2(t) - (\mathbb{E}\Lambda)^2$$

$$\mathbb{D}N_1(\lambda) = \mathbb{E}N_1^2(\lambda) - (\mathbb{E}N_1(\lambda))^2 = \lambda = \mathbb{E}N_1^2(\lambda) - \lambda^2 \Rightarrow \mathbb{E}N_1^2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathbb{E}N^2(t) = \int_0^\infty \mathbb{E}N_1^2(\lambda) dP(\Lambda < \lambda) = \int_0^\infty (\lambda^2 + \lambda) dP(\Lambda < \lambda) = \mathbb{E}\Lambda + \mathbb{E}\Lambda^2$$

$$\mathbb{D}N(t) = \mathbb{E}\Lambda + \mathbb{E}\Lambda^2 - (\mathbb{E}\Lambda)^2 = \mathbb{E}\Lambda + \mathbb{D}\Lambda$$

19-20

∃ $N_1(t)$ — станд. пуас процесс

∃ Λ — полож сл. величина с конеч. вторым моментом, независимая от $N_1(t)$.

Выразить $\mathbb{D}\underbrace{N_1(\Lambda)}_{N}$ через моменты случ величина Λ: $E\Lambda = a$, $D\Lambda = b$

$$\mathbb{E}N = \sum_{k=0}^{\infty} k P(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \, dU(\lambda) =$$

(распред Λ)

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right)}_{e^{-\lambda}\lambda \sum \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda} dU(\lambda) = \int_0^{\infty} \lambda \, dU(\lambda) = \mathbb{E}\Lambda$$

$$\mathbb{D}N = EN^2 - (EN)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \, dU(\lambda) - (\mathbb{E}\Lambda)^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right)}_{\Sigma (k-1+1) \lambda^k/(k-1)!} dU(\lambda) - (\mathbb{E}\Lambda)^2 = \int_0^{\infty} (\lambda^2 + \lambda) \, dU(\lambda) -$$

$$\underbrace{e^{-\lambda}\lambda^2 \sum \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{\lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}}$$

$$- (\mathbb{E}\Lambda)^2 = \mathbb{E}\Lambda^2 + \mathbb{E}\Lambda - (\mathbb{E}\Lambda)^2 =$$

$$= \mathbb{D}\Lambda + \mathbb{E}\Lambda$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}N = a \qquad \mathbb{D}N = a + b.$$

Задача 21

Условие

Сколько респондентов надо опросить, чтобы определить рейтинг политического деятеля с точностью 0.1% и надежностью 0.95?

Решение

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \leq \epsilon$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| \leq \epsilon\right) \geq \gamma$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| \leq \epsilon\right) \geq \frac{1-\mathbb{D}(\frac{1}{n}\sum X_i)}{\epsilon^2} = 1-\frac{p(p-1)}{\epsilon^2 n} \geq \gamma$$

$$\frac{p(1-p)}{\epsilon^2 n} \leq 1-\gamma \Rightarrow n \geq \frac{p(1-p)}{\epsilon^2(1-\gamma)}$$

$$n \geq \frac{1}{4\epsilon^2(1-\gamma)}$$

В нашем случае $\epsilon = 0.001$ и $\gamma = 0.95$

Таким образом получаем

Ответ: 5'000'000